Els fonaments de les tres lleis de Newton de la mecànica

Josep Graells* **i Carme Martín**†
Departament de Física Aplicada i Òptica. UB

«[...] Els antics consideraven dos aspectes de la mecànica: el racional, que procedeix amb exactitud mitjançant demostracions, i el pràctic. A la mecànica pràctica pertanyen totes les arts manuals, de les quals va manllevar el seu nom la mecànica. Però com que els artífexs no treballen amb exactitud absoluta, passa que el perfectament exacte es denomina *geomètric*, i *mecànic*, el que no és tan exacte. Tal vegada, els errors no resideixen en l'art sinó en els artífexs. Qui treballa amb menys precisió és un mecànic imperfecte; i si es pogués treballar amb precisió perfecta, seria el més exacte dels mecànics, perquè la descripció de les línies rectes i els cercles sobre els quals es basa la geometria pertany a la mecànica [...].»

Paràgraf del prefaci, redactat pel mateix Newton, a
Principis matemàtics de la filosofia natural
1a ed. Londres 5 juliol 1686
(Publicat en llatí el 1687).

Introducció

L'article «Les lleis fonamentals de la mecànica clàssica», del professor Ramon Lapiedra,[1] comença dient: «Les tres famoses lleis de Newton, que hom enuncia com les lleis fonamentals de la mecànica clàssica dels sistemes de partícules, constitueixen de fet en la seva formulació habitual una base no gaire adequada d'aquesta teoria, tot i que Newton va saber fer-ne un ús genial.»

Albert Einstein, en les seves notes autobiogràfiques,[2] analitza críticament el sistema newtonià, però acaba dient: «Ja n'hi ha prou, Newton, perdona'm. Tu vas trobar l'únic camí que en la teva època encara era possible per a un home de la màxima capacitat intel·lectual i de creació.»

Aquestes dues autoritzades opinions, creiem, expliciten la dificultat, si més no com a mínim didàctica, per exposar i explicar seriosament els principis fonamentals de la mecànica newtoniana. El professor R. Lapiedra rebla aques fet en la consideració final del seu article, a dalt esmentat, tot dient: «Esperem, tanmateix, que el fet d'haver donat ací, en una forma compacta, aquest punt de vista sobre els fonaments de la mecànica clàssica, pugui servir perquè en les nostres facultats, al moment d'explicar la lliçó *inevitable* dels principis de la mecànica, es digui quelcom més que les quatre frases de sempre per sortir del pas, mentre es passa alleujat a ocupar-se tot seguit de temes més substanciosos.»

Aquesta problemàtica, potser, encara esdevé més crítica en l'àmbit del batxillerat, com el professor Joaquim Agulló exposa en el seu text de la UPC:[3] «Tot i la gran difusió del coneixement d'aquestes lleis, la seva comprensió profunda demana un nivell d'abstracció no assolible als estudis de batxillerat. Per aquest motiu se'n sol tenir un coneixement trivialitzat, la substitució del qual planteja, tal volta, més dificultats que la d'un aprenentatge a partir de zero.»

Possiblement, part de les dificultats didàctiques tenen arrels en el fet que encara no hi ha un consens àmpliament acceptat sobre com interpretar, definir i relacionar els elements bàsics de la mecànica newtoniana: temps, espai, espaitemps, massa i força. Això condueix a la possibilitat que l'edifici de la mecànica newtoniana es pugui estructurar de maneres variades, no del tot físicament equivalents. Per exemple, A. Einstein considerava la llei de la inèrcia o primera llei de Newton com la clau de la física clàssica, mentre que W. Rindler, entre altres famosos experts, la considera un cas particular de la segona llei de Newton. Els que adopten el punt de vista de Kirchhoff i sobretot d'E. Mach consideren les forces d'interacció definides per la segona llei de Newton, és a dir la magnitud força passa a ser definida pel producte de la massa per l'acceleració ($\vec{F} \equiv m\vec{a}$); en canvi, molts d'altres (per exemple Feynman) consideren la força com una magnitud que té també altres atributs i propietats no previstos ni explicables pel producte $m\vec{a}$. Per tant, la segona llei de Newton segons alguns no és

*__Josep Graells__ (Cervera, 1946) és pèrit industrial elèctric per l'Escola d'Enginyeria Tècnica Industrial de Terrassa (1967) i doctor en Física per la Universitat de Barcelona (1978).

†__Carme Martín__ (Barcelona, 1950) és doctora en Física per la Universitat de Barcelona (1981) i és professora del col·legi La Salle Gràcia.

[1] Publicat a: *Treballs de física*, Institut d'Estudis Catalans, vol. 1, núm. 1 (Barcelona 1979).

[2] *Notas autobiográficas*, Alianza Editorial (1979).

[3] *Mecánica de la partícula y del sólido rígido*, Publicacions OK Punt (Barcelona, 1997).

una llei, sinó una definició de força, i segons d'altres és una semillei, ja que requereix conèixer la llei de la força.

Per acabar-ho de reblar, alguns autors barregen diferents punts de vista en tractar d'aquesta temàtica. Aquest fet porta a incrementar el confusionisme en els alumnes novells. Per exemple, s'empra la segona llei o el punt de vista d'E. Mach per definir la força, i posteriorment o abans s'utilitza la definició operacional estàtica de força.

L'objectiu del present article, limitat a l'àmbit del batxillerat i d'un primer curs de física general universitària, consisteix a presentar algunes senzilles i estructurades reflexions que expliciten clarament el nucli de les dificultats esmentades. S'adoptarà un punt de vista flexible, a partir del qual, creiem, es podran albirar diferents vies que faciliten l'explicació dels fonaments de la mecànica newtoniana. Per fer-ho ens basarem directament en alguns escrits i idees originalment proposades pel mateix Newton. Intentarem «pujar a les seves espatlles» per així poder observar més lluny. Se seguirà el *dictum* de l'edat mitjana, adoptat per Newton, com consta en la carta que va enviar a Hooke, el cinc de febrer de 1676: «Si he pogut veure-hi tan lluny ha estat perquè vaig pujar a les espatlles de gegants.»

Les lleis fonamentals de la mecànica newtoniana segons els *Principia* d'Isaac Newton

Newton començà els *Principia*[4] amb vuit definicions i un ampli escoli de caràcter més especulatiu i potser menys concís que les definicions. Les vuit definicions precisen el que, segons Newton, s'ha d'entendre per:

- Quantitat de matèria.
- Quantitat de moviment.
- Massa inercial, que també qualifica com a *vis inertiae* o força ínsita.
- Força impresa o aplicada.

Newton dedica les quatre definicions restants a la força centrípeta, de la qual proporciona tres exemples: *la gravetat terrestre*, *el magnetisme*, i ···«aquella força mitjançant la qual els planetes són contínuament apartats del moviment rectilini». En l'escoli, Newton reflexiona àmpliament sobre el temps, l'espai i el moviment. Presenta una distinció general entre el que és absolut i el que és relatiu referent a aquests conceptes.

Després de les definicions i l'escoli segueixen els axiomes o lleis del moviment, que Newton enuncià de la manera següent:

Primera llei: tots els cossos continuen en estat de repòs o de moviment uniforme en línia recta, llevat que es vegin forçats a canviar aquest estat a causa de forces aplicades.

Segona llei: el canvi de moviment és proporcional a la força motriu aplicada (impresa) i té lloc en la direcció de la línia recta en què s'aplica la força.

Tercera llei: per a tota acció hi ha una reacció oposada i igual. Les accions recíproques de dos cossos entre ells són sempre iguals i dirigides cap a parts oposades.

Les tres lleis són complementades per sis corol·laris i un escoli. Tres llibres, subdividits en seccions, completen els *Principia*. Els dos primers versen sobre el moviment dels cossos i el tercer, afegit en la tercera edició de l'any 1723, tracta sobre el «sistema del món».

En l'esquema següent, figura 1, s'intenta representar, d'una manera simplificada, l'estructura relacional entre els principals elements de la visió newtoniana.

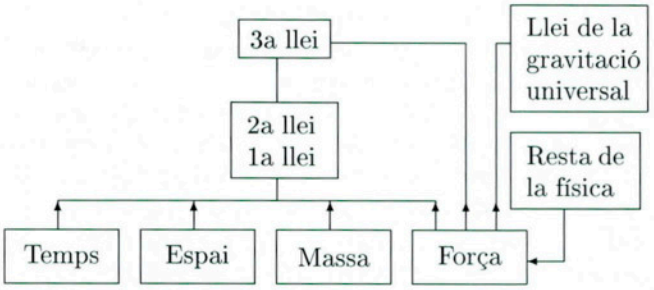

Figura 1: *Principals relacions entre els elements conceptuals de la física newtoniana*

Com ja s'ha anticipat en la introducció, probablement és en aquest nivell de base on neixen les principals dificultats, tant formals com constructives, de l'edifici newtonià.

En l'apartat següent, que es dividirà en dos subapartats, s'analitzarà aquest esquema, i s'enriquirà amb altres possibilitats relacionals. Per fer-ho, en el primer subapartat s'aprofundirà en els conceptes de *temps*, *espai*, *espaitemps* i la seva relació amb la primera llei. En el segon subapartat és on s'analitzen les magnituds massa i força, conjuntament amb la segona i tercera llei, i es presentarà una visió general del sistema newtonià mitjançant el desenvolupament més detallat de la figura 1.

Algunes reflexions sobre la fonamentació i formulació de les lleis de Newton

Temps i espai. Espaitemps i el principi d'inèrcia o primera llei

En l'escoli que segueix a les definicions, Newton proposa una visió de temps i espai que és factible concretar, matemàticament i conceptualment, mitjançant l'estructura d'espai afí euclidià[5]

[4] Isaac Newton *The Principia: mathematical principles of natural philosophy*, a new translation by I. Bernard Cohen and Anne Whitman, assisted by Julia Budenz, Berkeley, University of California Press (1999).

[5] Exemples d'espais afins euclidians els proporciona la geometria elemental del pla i de l'espai. Recordem que un espai afí euclidià E, el formen un continuum d'elements P, anomenats punts $\in = \{P\}$, de tal manera que a cada parella P_1 i P_2 de punts els

El temps es representa mitjançant un espai afí euclidià unidimensional T, els punts del qual, idealment, es poden associar amb les successives posicions de les busques d'un rellotge estàndard. Els punts de T s'anomenen *instants* i les duracions T entre dos instants T_1 i T_2 resten definides pel vector unidimensional $T = T_1T_2 = T_2 - T_1$. La fixació de la unitat de temps equival a definir una base τ_0 de l'espai vectorial de les duracions, és a dir una referència de temps consisteix a fixar un punt T_0 de T conjuntament amb la base o unitat de temps τ_0, $\{T_0, \tau_0\}$. Així, tot punt T_1 de T ve coordinat pel nombre real t_1, de manera que $T_0T_1 = t_1\tau_0$.

Aquesta formalització del concepte de temps la considerem concordant amb la definició que Newton dóna en els *Principia*: «El temps, absolut, vertader i matemàtic, per ell i per la seva pròpia natura, flueix uniformement, i es diu amb un altre nom *durada*.»

L'espai E es representa mitjançant l'espai afí de la geometria euclidiana elemental. Si O és un punt arbitrari de l'espai afí, anomenat *origen* i $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$ una base ortonormalitzada de l'espai vectorial associat a E, llavors qualsevol altre punt P ve definit per les coordenades cartesianes (x, y, z), de tal manera que $\overrightarrow{OP} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} \equiv \vec{r}$. Atès que $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$ són unitaris, les coordenades (x, y, z) tenen unitats de longitud. Òbviament, els espais afins emprats són homogenis i isòtrops, o sia, tenen les mateixes propietats fisicogeomètriques en cada punt i per a qualsevol direcció al voltant de cada punt. Dit d'una altra manera, les propietats, per exemple mètriques, no varien sota l'acció de translacions i rotacions.

Se suposarà que cada observador experimentador inicialment està equipat amb un rellotge i regles, les quals en materialitzar les bases (τ_0) i $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$, possibiliten la mesura d'intervals temporals i espacials. La figura 2 representa esquemàticament les bases de temps i d'espai, i el sistema cartesià de coordenades associat a un observador.

Aquest observador descriu, respecte al seu sistema de coordenades, la trajectòria $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP}(t)$ d'una partícula (punt material) que ocupa les posicions $P(t)$ en el transcurs del temps. Recordem que l'observador representa la cinemàtica del punt material mitjançant les equacions de la trajectòria $\vec{r}(t)$, velocitat $\vec{v}(t) = d\vec{r}/dt$ i acceleració $\vec{a}(t) = d\vec{v}/dt$:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{dx(t)}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy(t)}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dz(t)}{dt}\hat{k} \equiv$$
$$\equiv v_x(t)\hat{\imath} + v_y(t)\hat{\jmath} + v_z(t)\hat{k} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$
$$\vec{a}(t) = \frac{dv_x(t)}{dt}\hat{\imath} + \frac{dv_y(t)}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dv_z(t)}{dt}\hat{k} \equiv$$
$$\equiv \frac{d^2x}{dt^2}\hat{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}.$$

El producte cartesià dels espais afins T i E, és a dir, $T \times E = \{\mathcal{P} \ / \ \mathcal{P} = (t, \vec{r})\}$, defineix l'espaitemps newtonià, els punts del qual $\mathcal{P}$ s'anomenen *esdeveniments*. Respecte a les bases (T_0, τ_0) de T i $(O, (\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}))$ de E, l'esdeveniment $\mathcal{P}$ té per coordenades

$$\mathcal{P} = (t, \vec{r}) = t\tau_0 + x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}.$$

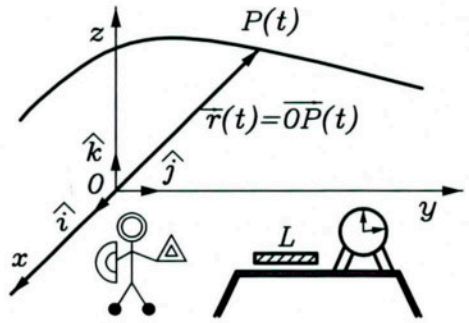

Figura 2: *Sistema de coordenades cartesià associat a un observador*

Ara és pertinent remarcar que en el sistema newtonià tots els observadors, independentment del seu estat de moviment, poden emprar el mateix temps, el temps absolut. Així doncs, se suposa que esdevé factible discriminar, independentment de l'observador, si dos esdeveniments $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_2$ tenen lloc simultàniament; per tant, $t(\mathcal{P}_1) = t(\mathcal{P}_2)$ és una igualtat objectiva. Això implica que els observadors tenen mitjans per comunicar-se instantàniament. D'aquí la natura estratificada de l'espaitemps newtonià, representada esquemàticament en la figura 3, en la qual, necessàriament, s'ha suprimit una dimensió espacial.

En la figura es representen dues «instantànies» de l'espai (simultaneïtats), en els temps t_1 i t. La família d'observadors I_0 resten en repòs, ja que els seus esdeveniments $\mathcal{P}(t)$ tenen per components $I_0 = \{\mathcal{P}(t)/t, x =$ ct., $y =$ ct., $z =$ ct.$\}$. Per tant, la velocitat i l'acceleració dels I_0 són nul·les. En la visió newtoniana de l'espai absolut s'ha de suposar que els observadors I_0 són uns privilegiats per descriure i formular les lleis de la mecànica. Aquest privilegi s'ha de reflectir en les mateixes lleis, perquè han de possibilitar el disseny d'experiments que posin en evidència l'existència real de l'espai absolut. Dit d'una altra manera, les lleis de la natura haurien

correspon unívocament un vector $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$ que pertany a l'espai vectorial euclidià $V = \{\vec{v}\}$ associat a $\in$. La dimensió de l'espai vectorial defineix la dimensió de l'espai afí, és a dir, l'espai afí E està constituït per la parella $\in$ i V, $E = \{\in, V\}$. Fixat arbitràriament un punt O de $\in$, anomenat *origen*, qualsevol altre punt P de $\in$ es pot representar mitjançant $P = O + \vec{v}$, on $\vec{v}$ és el vector definit per O i P. En fixar una base ortonormalitzada de V, $(\hat{e}_i)$, la parella $\{O, (\hat{e}_i)\}$ constitueix una base d'un sistema de coordenades cartesià de l'espai afí.

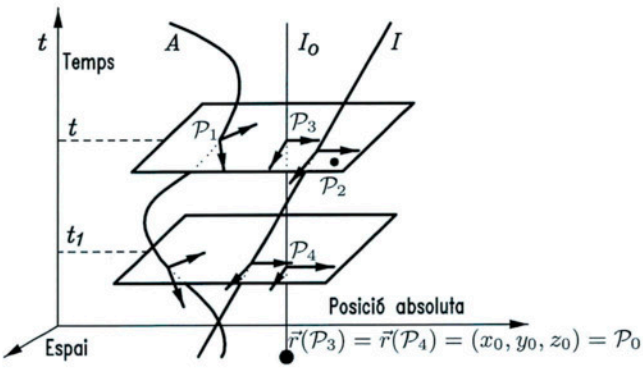

Figura 3: *Espaitemps newtonià absolut. I_0, I i A representen tres observadors: I_0, en repòs absolut; I, en moviment rectilini i uniforme; i A accelerat*

de predir l'existència de fenòmens físics que permetessin discriminar objectivament si dos esdeveniments, per exemple, els $\mathcal{P}_3$ i $\mathcal{P}_4$ de la figura 3, tenen lloc en un mateix punt P de l'espai absolut $OP = \vec{r}(\mathcal{P}_3) = \vec{r}(\mathcal{P}_4)$. Emprant les paraules del mateix Newton:[6]: «L'espai absolut, per la seva natura, sense relació amb res extern, roman sempre similar i immòbil.»

En resum, l'espaitemps absolut, que designem amb la lletra N, resta definit per la tríada T, E i I_0

$$N = \{T \times E; I_0\} = \{\mathcal{P}, I_0 \ / \ \mathcal{P} = t\tau_0 + x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}\}.$$

Les úniques operacions de simetria que posseeix N són les translacions temporals i espacials, i les rotacions espacials. Per tant, també han de ser les úniques simetries que obligatòriament han de respectar les lleis de la física construïdes sobre l'estructura de l'espaitemps absolut N.

Però arribats a aquest punt, immediatament es planteja la qüestió: on encaixa el principi de relativitat galileià en l'estructura d'espaitemps N, acabada de definir?

Estimem pertinent recordar el principi de relativitat emprant les mateixes paraules de Galileu. En un text del *Diàleg sobre els dos màxims sistemes del món*, Galileu diu: «Tanqueu-vos amb algun amic en alguna estança que estigui sota la coberta d'un vaixell i procureu que hi hagi mosques, papallones i altres animals voladors semblants. Procureu-vos també un vas gran d'aigua amb alguns peixos dins; pengeu també un recipient que vagi degotejant, gota a gota, en un altre de broc estret, posat a sota; quan la nau estigui quieta, observeu diligentment com els animals volen amb velocitats anàlogues, van cap a totes les parts de l'estança; els peixos se'ls veurà nedar diligentment en totes les direccions; les gotes, en caure, entraran totes en el recipient inferior [...]. Un cop observades atentament totes aquestes coses [...], feu que la nau es mogui amb una velocitat qualsevol. Si el moviment de la nau és uniforme i no fluctuant cap a un lloc o altre, no advertireu cap variació en els efectes esmentats, ni podreu esbrinar per cap d'aquests efectes si la nau es mou o està quieta [...], les gotes cauran, com abans, en el recipient inferior, sense que n'hi hagi cap que caigui cap a popa, encara que el vaixell, mentre la gota va per l'aire, es desplaci molts pams. Els peixos en l'aigua no mostraran més cansament en anar cap a la part davantera que cap a la part de darrere del recipient [...], finalment les mosques i les papallones mantindran el seu vol indiferentment cap a totes bandes i mai s'amuntegaran cap a la part de popa, com si es veiessin impulsades pel ràpid curs de la nau [...]. De tota aquesta correspondència d'efectes, la causa és que el moviment de la nau és comú a totes les coses que conté incloent-hi l'aire, i per això, vaig dir que us mantinguéssiu sota coberta.» [7]

En resum, el principi de la relativitat pressuposa l'existència d'una família d'observadors, anomenats *inercials*, els quals, en moure's amb velocitat relativa constant, són totalment equivalents per formular les lleis de la física, o sia, inferiran dels seus experiments les mateixes lleis. Dit d'una altra manera, cap observador podrà detectar el seu estat de moviment mitjançant experiències efectuades dins el seu laboratori. En la figura 3, s'ha representat un d'aquests observadors mitjançant la recta I. Aquesta simple observació possibilita d'incorporar el principi de la relativitat, respectant el temps absolut, solament amb considerar l'observador I_0, fins ara considerat com a absolut i privilegiat, com un més de la família d'observadors inercials $I(\vec{v} = \text{ct.})$.

Es tracta, doncs, de buidar tots els privilegis que singularitzaven l'observador I_0, mitjançant el procediment d'eliminar de l'estructura d'espaitemps la suposició que es pot discriminar objectivament si dos esdeveniments tenen lloc en un mateix punt de l'espai. La igualtat $\vec{r}(\mathcal{P}_3) = \vec{r}(\mathcal{P}_4)$ passa a dependre de l'observador inercial. Per tant, l'estructura d'espaitemps que incorpora el principi de relativitat galileià, que designarem amb $N(G)$, passa a ser

$$N(G) = \{T \times E; \ I(\vec{v} = \text{ct.})\}.$$

Això implica que les lleis de la física newtoniana han de respectar la simetria definida per les conegudes transformacions de Galileu, vegeu la figura 4, a més de les esmentades simetries corresponents a N.

[6] Newton sols va presentar arguments sòlids que permetien discriminar d'una manera objectiva l'absència de rotació uniforme, mitjançant el cèlebre experiment de la rotació de la galleda amb aigua. Aquest experiment s'explica en els *Principia* a l'escoli que segueix les definicions. En la segona meitat del segle XIX se'l va voler identificar amb l'eter electromagnètic.

[7] Extret del llibre de J. M. LÉVY-LEBLOND, *Conceptos contrarios o el oficio de científico*, Tusquets Editores, Metatemas, 70 (Barcelona, 2002). Vegeu també la traducció al castellà de la font original: Galileo Galilei. *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias*, edició preparada per C. Solis i J. Sádaba, Editora Nacional (Madrid, 1976).

Cal remarcar que les tres lleis de la dinàmica newtoniana es poden formular emprant qualsevol dels dos models d'espaitemps N i $N(G)$. Newton era plenament conscient d'aquest fet, com N. M. J. Woodhouse posa en evidència en una comunicació a R. Penrose:[8] «En un fragment del manuscrit *De motu corporum in medius regulariter cedentibus* (un precursor dels *Principia*, escrit el 1684), Newton originalment proposà fonamentar la seva mecànica en cinc (o sis) lleis fonamentals, en lloc de les tres que hem conegut a través dels *Principia*. La llei quarta era realment una clara asseveració del principi de relativitat de Galileu! Newton n'era plenament conscient, que aquestes lleis no eren independents unes de les altres.»

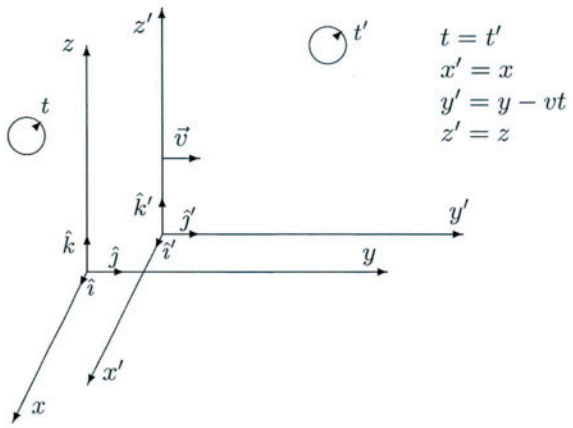

Figura 4: *Transformacions estàndard de Galileu*

Però el que sí que es pot afirmar és que tothom està d'acord a construir la física newtoniana sobre l'estructura d'espaitemps que hem anomenat $N(G)$. Totes les experiències i lleis de la física la corroboren, quan les velocitats v són petites respecte de la velocitat de la llum en el buit c, és a dir, si $v/c \ll 1$, i per a camps gravitatoris febles (per exemple si $GM/(c^2R) \ll 1$). Quan les velocitats són grans, és a dir, quan no es poden negligir termes de l'ordre v^2/c^2, llavors s'ha d'emprar la teoria de la relativitat especial, en la qual s'elimina el temps absolut, i si a més els camps gravitatoris no són febles, s'ha d'emprar la teoria de la relativitat general, en la qual l'espai i el temps perden la natura euclidiana. Ambdues teories les va crear Albert Einstein, el 1905 i el 1915 respectivament.

En la figura 5 s'esquematitzen les diferències bàsiques entre els espaitemps N i $N(G)$.

Després d'aquesta introducció a l'estructura de l'espaitemps que fonamenta la teoria newtoniana, tot seguit s'emprarà per analitzar l'abast de la primera llei de

[8] Vegeu l'article Newton, quantum theory and Reality. R. Penrose en el llibre *300 years of Gravitation* editat per S. W. Hawking i W. Israel, CUP (1987).

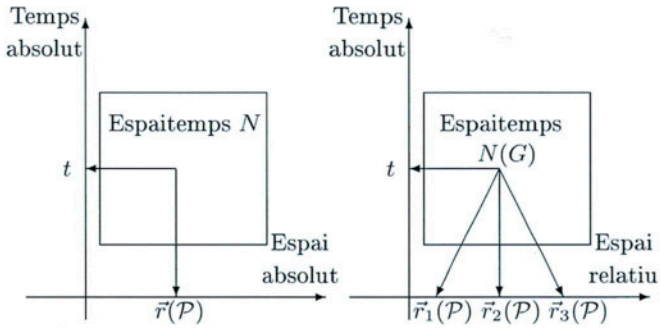

Figura 5: *Diferències estructurals entre N i $N(G)$. A la figura de l'esquerra pot veure's la posició absoluta de l'esdeveniment $\mathcal{P}$. A la de la dreta les posicions de l'esdeveniment $\mathcal{P}$ segons diferents observadors inercials*

Newton, també coneguda com a *principi de la inèrcia de Galileu*. Aquesta llei està directament relacionada amb el principi de relativitat, ja que es pot considerar que la família d'observadors inercials està determinada per la primera llei. Sols respecte dels observadors inercials es verifica la primera llei. Aquí tenim un exemple d'un vessant subtil de les lleis de la física, ja que tal com H. Poincarè ens va ensenyar, les lleis ajuden a definir els conceptes que empren i a la vegada fan prediccions sobre aquests conceptes. Per exemple, la llei de la gravitació universal de Newton es pot emprar per definir el camp gravitatori, via la dinàmica d'una partícula de prova, i un cop definit i determinat el camp gravitatori, es pot emprar per calcular la trajectòria de la partícula de prova. Per tant, en física, tal com li plau recalcar a J. A. Wheeler, està fora de lloc l'estratègia logicomatemàtica que diu: «Defineix completament els conceptes abans de fer res...»

Un altre aspecte de les lleis de la física, que cal tenir molt present, és que les lleis sempre són aproximades, en el sentit que posseeixen un rang de validesa, on les seves prediccions són corroborades per l'experiència. Fora d'aquest rang ja no descriuen satisfactòriament la realitat experimental, i per tant s'ha de considerar que són invalidades pel fet experimental. Per exemple, abans s'han exposat dos límits de validesa del model de l'espaitemps newtonià i galileià $N(G)$, i per tant, de la mecànica newtoniana.

Aquestes dues característiques generals de les lleis de la física, que acabem de sintetitzar d'una manera molt simple, queden reflectides explícitament en la visió de la primera llei, que A. Einstein va exposar en un curs d'introducció a la mecànica que impartí durant el semestre d'hivern de 1909-1910 al Politècnic de Zuric. En les notes,[9] que sols va redactar, per a ús personal, es pot llegir

[9] *Lecture notes for introductory course on mechanics at the University of Zurich.* Winter semester (1909/1910). En: The collected papers of Albert Einstein, vol. 3. The Swiss years, 1909,

(la lletra cursiva és dels autors d'aquest article):

«Principi de la inèrcia. Un punt material que no interacciona amb altres cossos es mou sense acceleració: en un cert sentit, aquesta llei és una *llei empírica* (boles de billar, vagons de tren), tal vegada, parlant estrictament *té caràcter de definició*, ja que diem que altres cossos no actuen sobre el cos, si aquest es mou uniformement en línia recta. Però, per a tots els propòsits pràctics la llei es pot considerar empírica o aplicar-se sense suposicions artificials.

Però aquesta llei no es verifica per a estats de moviment arbitraris del sistema de coordenades. Encara que sí que es verifica fins a *un cert grau d'aproximació* per a sistemes en repòs respecte de la Terra, i àdhuc amb millor aproximació, per a sistemes l'origen dels quals resta en repòs respecte del centre de masses del sistema solar i per a sistemes tals que els eixos es dirigeixen permanentment cap a tres estels fixos.»

Després d'aquesta visió einsteniana de la llei de la inèrcia o primera llei de Newton, tot seguit es concretarà amb una formulació matemàtica. Per fer-ho, és pertinent recordar les definicions primera i segona amb què Newton comença els *Principia*.

Definició segona: «La quantitat de moviment és la mesura d'aquesta quantitat, que sorgeix de la velocitat i de la quantitat de matèria conjuntament.» La quantitat de moviment és, per tant, el producte de dos factors, la velocitat i la «quantitat de matèria», la qual cal que sigui explicada físicament.

Newton ho va intentar en la definició primera, en què exposa que la quantitat de matèria es mesura per la seva densitat i el seu volum. Evidentment es tracta d'una definició de caràcter circular (tautològic), ja que la densitat de matèria només es pot definir per la quantitat de matèria en la unitat de volum. En la mateixa definició Newton també diu que en lloc de quantitat de matèria emprarà el terme *massa*.

En resum, la quantitat de moviment que també s'anomena *moment lineal*, es representa pel vector $\vec{p}$, producte de la massa m i la velocitat $\vec{v}$: $\vec{p} = m\vec{v}$. En el subapartat següent s'aprofundirà en els conceptes de *massa* i *força*, però abans es formularà la primera llei de Newton o principi de la inèrcia en els termes següents:

Primera llei: $\vec{p} = m\vec{v} =$ constant, en absència de forces, és a dir, per al cos aïllat.

Aquesta formulació de la primera llei incorpora un vessant de caràcter dinàmic, a través de la massa, no inclosa en la formulació habitual (acceleració nul·la). Per exemple, és més «difícil» aturar, o sia, canviar l'estat de moviment, d'un camió carregat que quan va buit.

Finalment, per acabar aquest extens subapartat, s'intentarà resumir-lo completant la figura 1 amb les relacions conceptuals que s'han explicat, referents a la primera llei, tal com s'indica en la figura 6.

Tornem a insistir que els dos bucles relacionals de la figura 6 s'han de considerar segons el punt de vista flexible que s'ha adoptat; per tant, no amaguen raonaments físics de caràcter circular, sinó que són bucles constructius segons la visió de H. Poincaré. O sia, s'empra la primera llei per tal de definir part de les entitats que hi intervenen i, a la vegada, per fer prediccions sobre el seu comportament, per exemple, tal com A. Einstein la formula i interpreta. Evidentment s'ha de tenir present que una definició logicomatemàtica esdevé estèril, en el vessant predictiu, dins el món de la física.

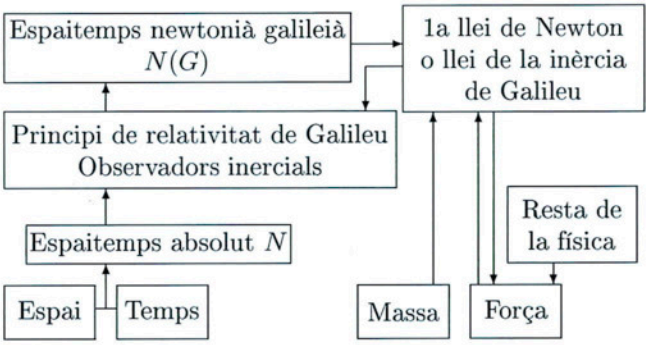

Figura 6: *La primera llei de Newton i les seves relacions amb els conceptes i les estructures bàsiques del model newtonià*

En el subapartat següent es completarà la figura 6 amb les relacions que es derivaran de l'anàlisi dels conceptes de *massa* i *força*, segons intervenen en la segona i tercera lleis de Newton.

Massa i força. La segona i tercera llei

Newton va marcar un abans i un després en el món de la física, per exemple, a partir de les seves lleis es pot dir que es comprèn el perquè els cossos es mouen tal com ho fan. D'aquí que, en els textos de mecànica, és habitual definir la *dinàmica* com la teoria que relaciona les forces amb el moviment. No és, doncs, gens estrany l'impacte de Newton sobre els científics de tots els temps, fet que queda sintetitzat en el conegut epitafi d'Alexander Pope[10]: «La Natura i les lleis de la Natura restaven amagades en la nit. Déu va dir: Sigui Newton! I tot va ser llum.»

Una característica de les lleis de Newton és l'aparició d'un nou concepte fonamental, el de *massa*. Però, curiosament, el sistema newtonià requereix dos tipus diferents de massa: la massa gravitatòria, m_g, i la massa inercial, m_i. Aquesta dualitat ja s'evidencia en la mateixa definició operacional, o sia, en la prescripció de les operacions per mesurar la massa.

1911. English Translation. Princeton University Press, pàg. 4-5 (1993).

[10] *Let Newton be! A new perspective on his life and works*, editat per John Fauvel. Raymond Flood, Michael Shortland, Robin Wilson, OUP (1988).

Recordem que la massa gravitatòria, m_g, es defineix fent ús de la força gravitatòria. Com és conegut, s'empra una balança simètrica (de braços iguals) i es diu que dos cossos tenen la mateixa massa, si, en col·locar un cos en cada platet, la balança resta en equilibri. La igualtat de masses gravitatòries és una propietat intrínseca als cossos, ja que la condició d'equilibri de la balança és independent del lloc de la Terra on s'efectuï l'experiment. Fàcilment es comprova que gaudeix de les propietats d'additivitat necessàries (la massa d'un cos és la suma de les masses de les seves parts) i d'independència de la massa patró escollida arbitràriament (m_{g1}/m_{g2} és independent de la unitat de massa). Les partícules responen o s'acoblen a un camp gravitatori a través de m_g. Al seu torn, la massa gravitatòria actua com a font de camp gravitatori. És pertinent recordar la similitud, bé que sols formal, entre la massa gravitatòria i la càrrega elèctrica. Ambdues magnituds estan directament relacionades amb els seus camps respectius, la massa gravitatòria amb el camp gravitatori i la càrrega elèctrica amb el camp electrostàtic.

En canvi, la massa inercial, m_i, és una característica de les propietats inercials dels cossos o partícules, o sia, ha de mesurar la tendència que tenen els cossos a conservar el seu estat de moviment. És la massa que intervé en la formulació, equació (1), de la primera llei de Newton. Per aprofundir en la definició operacional de *massa inercial* s'ha de recórrer a l'anàlisi de la segona i tercera lleis de Newton. Però abans, és convenient recordar que, experimentalment, es comprova que ambdues masses, m_i i m_g, són numèricament iguals si s'empra un sistema d'unitats adient (per exemple l'SI, el CGS, etc.). Galileu va anticipar aquesta igualtat en l'estudi de la caiguda lliure dels cossos i va descobrir que tots els cossos cauen amb la mateixa acceleració, independentment de la seva natura i composició, sempre que siguin negligibles les influències de l'aire. D'aquí s'infereix que $m_i = m_g$, igualtat que es coneix com a *principi d'equivalència de Galileu.*

Però com que la teoria newtoniana requereix els dos tipus de massa, la igualtat $m_i = m_g$ s'ha d'interpretar com una extraordinària i curiosa igualtat numèrica. Tant és així que si no es verifiqués, és a dir, si m_i fos diferent de m_g, l'estructura newtoniana no requeriria cap modificació.[11] A partir d'ara, i com és habitual, ambdues masses les designarem per la mateixa lletra m.

Tot seguit s'analitzaran la segona i tercera lleis de Newton. Se seguirà una formulació matemàtica en concordança amb els axiomes o lleis del moviment newtonians, és a dir, s'intentarà ser fidel a la visió newtoniana, per analitzar-ne, després, críticament alguns punts febles.

Recordem que la segona llei, que és la vertadera llei del moviment, Newton l'expressà de la manera següent: el canvi de moviment és proporcional a la força actuant i té lloc en la línia recta en què s'aplica la força. Per canvi de moviment, Newton indubtablement entenia el canvi en el temps del moment lineal. La magnitud moment lineal, $\vec{p} = m\vec{v}$, s'ha emprat per formular la primera llei, equació (1), que tot seguit reproduïm per completesa amb les restants:

Primera llei:

$$\vec{p} = m\vec{v} = \overrightarrow{\text{constant}}, \qquad \text{en absència de forces} \qquad (1)$$

La segona llei pot formular-se com és habitual

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\vec{a}, \qquad (2)$$

on $\vec{F}$ representa la força que actua sobre la partícula de massa m.

Respecte a la tercera llei, és a dir, que les forces que dos cossos A i B s'exerceixen l'un sobre l'altre són sempre iguals en mòdul, però de sentits oposats, es formula senzillament:

$$\vec{F}_{A\to B} = -\vec{F}_{B\to A}. \qquad (3)$$

Newton, com ja s'ha justificat abans, era plenament conscient que les seves lleis del moviment, equacions (1), (2) i (3), no són independents les unes de les altres, ni òbviament del mateix sistema newtonià. Per exemple, la primera llei, dins de l'enfocament proposat, no es pot considerar estrictament un cas particular de la segona llei, quan $\vec{F} = \vec{0}$, ja que operacionalment s'ha d'emprar la primera llei per definir els observadors inercials i, fins i tot, els intervals de temps, per obtenir així $\vec{v} = \overrightarrow{\text{constant}}$, per a una partícula aïllada. Altrament i emprant les paraules de J. A. Wheeler, el temps físicament es defineix de manera que la representació dels moviments dels cossos sigui la més senzilla possible. D'aquí el bucle de l'esquerra de la figura 6.

Les figures 1 i 6 sintetitzen d'una manera molt esquemàtica un possible entramat de relacions. Per començar i concretar l'anàlisi d'alguns dels aspectes dinàmics que considerem rellevants, potser és pertinent tenir present que, segons R. P. Feynman, les lleis de Newton s'han d'interpretar com una espècie de programa, en l'encapçalament del qual diu: «presta atenció a les forces». Però Newton sols va descobrir dues coses respecte a la natura física de les forces: la llei de la gravitació universal i la tercera llei. Per a la força gravitatòria va descobrir la llei completa, i per a la resta de forces sols va proporcionar una regla o propietat general: que les forces apareixen en la natura sempre aparellades, d'igual mòdul i oposades. També s'ha d'esmentar que, a través de la regla del paral·lelogram, Newton va postular el

[11] En canvi, la relativitat general incorpora l'igualtat $m_i = m_g$ com una identitat física $m_i m_g$. Per tant, si no es verifiqués, aquesta teoria quedaria invalidada. Vegeu, per exemple: La interacció gravitatòria: De Newton a Einstein, o de l'espai i temps absoluts newtonians a la geometrodinàmica einsteniana, Revista de Física, 2n semestre (2000).

principi de superposició per a la composició de forces, és a dir, que les forces són magnituds que matemàticament obeeixen els axiomes de l'àlgebra vectorial.

Una altra característica del concepte de força és que té un origen material, en el sentit que si la força que actua sobre un cos no és zero, llavors sempre es trobaran al seu entorn altres cossos que en són l'origen. Aquest origen material de les forces ja es preveu en la primera llei o principi de la inèrcia, ja que la partícula manté la seva velocitat constant respecte de qualsevol referencial inercial, si resta lliure de la influència dels altres cossos. Per tant, s'ha de suposar el cos idealment aïllat o situat a distància «infinita» de la resta de cossos, (per a una anàlisi de les anomenades *forces inercials*, i de la seva relació amb l'espaitemps N i $N(G)$, vegeu, per exemple, l'article referenciat en la nota 11, a peu de pàgina).

Pel que fa a la mesura quantitativa de les forces, en principi es pot emprar la força gravitatòria com un estàndard comparatiu, atès que sols cal equilibrar l'efecte d'una força donada mitjançant un pes adequat, el qual mitjançant una politja i una corda, es pot aconseguir que actuï en la direcció oposada a la força que es vol mesurar. El desenvolupament d'aquesta idea condueix a la definició operacional del concepte estàtic de força.

Un altre punt remarcable és que la tercera llei possibilita la transició des de la mecànica d'una partícula a la d'un sistema de partícules; per tant, la tercera llei esdevé fonamental en el camp de l'estàtica, l'anàlisi estructural, la resistència de materials, etc., per esmentar-ne algun exemple.

Però per més que s'aprofundeixi en la magnitud força, la segona llei és *de facto* més propera a una *semillei* que a una llei. Sols es podrà considerar com una llei completa si va acompanyada de la llei que determina la força. Per exemple, per a les forces gravitatòries la llei de la gravitació universal, per a les forces electrostàtiques la llei de Coulomb, etc. Si ensems es té en compte l'entramat de relacions de l'estructura newtoniana esquematitzat en les figures 1 i 6, s'infereix que sota un punt de vista axiomàtic les lleis de Newton són raonablement criticables. Òbviament una mentalitat matemàtica que prengui com a model axiomàtic, per exemple, els axiomes euclidians per construir la geometria elemental, s'ha de sentir insatisfeta amb el punt de vista newtonià. Aquestes i altres consideracions, referents bàsicament al vessant predictiu del moviment dels cossos, van conduir alguns físics a proposar punts de vista axiomàtics alternatius. Per exemple, G. Kichhoff, a mitjan segle XIX, en el seu cèlebre curs de fisica matemàtica, va degradar el concepte de *força*. En efecte, va interpretar la segona llei com una prescripció que defineix la força. Però com exposa R. P. Feynman, hi ha d'haver quelcom d'equivocat en aquest enfocament. Emprant la senzillesa de les seves paraules: «Si hem descobert una llei fonamental que diu que la força és igual a la massa per l'acceleració i llavors definim la força com el producte de la massa per l'acceleració, no hem trobat res.» D'un abast més radical va ser la contribució de H. Hertz,[12] que al final del segle XIX, va proposar eliminar la magnitud força de l'edifici newtonià, pel procediment de substituir-la del sistema en estudi via l'acoblament del sistema amb altres sistemes generalment «amagats». Hertz va portar a terme d'una manera consistent el seu programa, però com no va aportar resultats fructífers o d'enfocament més senzill, no ha tingut repercussions sensibles en el desenvolupament de la mecànica newtoniana.

D'un abast més ampli, profund i de repercussions evidents en el desenvolupament dels principis de la mecànica van ser les aportacions que E. Mach[13] va fer al final del segle XIX i les albors del segle XX. Bastants autors, per formular d'una manera alternativa la segona i tercera llei de Newton, han seguit més o menys fidelment el punt de vista d'E. Mach. Per a una exhaustiva anàlisi crítica i estudi històric del concepte de força, ens plau recomanar l'obra de Max Jammer (M. Jammer, 1999).

Per fer-nos tan sols una idea molt simplificada del punt de vista d'E. Mach, pel que fa a la segona i tercera lleis, considerarem un sistema aïllat constituït per dues partícules 1 i 2, de masses m_1 i m_2, en mútua interacció. Primer analitzarem el sistema sota el punt de vista estrictament newtonià: sigui $\vec{F}_{12}$ la força que la segona partícula fa sobre la primera i $\vec{F}_{21}$ la força que la primera partícula exerceix sobre la segona. D'acord amb la tercera llei, $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ i, si tot seguit s'aplica la segona llei, tenint en compte que el sistema resta aïllat, és a dir, $\vec{F}(\text{externes}) = \vec{0}$, s'obté:

$$\frac{d\vec{p}_{12}}{dt} = -\frac{d\vec{p}_{21}}{dt} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(\vec{p}_{12} + \vec{p}_{21}) = \vec{0}, \qquad (4)$$

on $\vec{p}_{12} = m_1\vec{v}_1$ i $\vec{p}_{21} = m_2\vec{v}_2$ són els moments lineals d'ambdues partícules. Des del punt de vista newtonià el que s'ha deduït és la llei de conservació del moment lineal total del sistema aïllat. Tàcitament se suposa que s'empra un referencial inercial. Com dins el marc de validesa de la mecànica newtoniana, les masses m_1 i m_2 resten constants en el procés d'interacció, l'equació (4) també es pot escriure:

$$m_1\vec{a}_{12} = -m_2\vec{a}_{21}. \qquad (5)$$

L'equació (5) facilita la definició operacional de les masses inercials, ja que

$$\frac{m_1}{m_2} = -\frac{a_{21}}{a_{12}}.$$

Els resultats experimentals mostren que és una bona definició, en el sentit que, dins el marc de validesa de

[12] Henrich HERTZ, *The principles of mechanics, presented in a new form*, Dover (1956).

[13] E. MACH, *The science of mechanics*, Open Court (La Salle, Chicago, 1907).

la mecànica newtoniana, la massa inercial definida així, gaudeix de la propietat d'additivitat, i m_1/m_2 és independent de la massa unitat escollida arbitràriament. A més a més, m_1/m_2 coincideix numèricament amb el corresponent quocient dels pesos de les partícules 1 i 2, és a dir, corrobora la igualtat entre les masses inercial i gravitatòria.

Fins aquí, el que ens diu la mecànica newtoniana. Una contribució d'E. Mach, referent a la segona i tercera lleis de Newton, va consistir en capgirar tota la línia argumental seguida. En efecte, E. Mach va postular l'equació (5), és a dir va partir de l'equació (5) per definir tot seguit la força d'interacció $\vec{F}_{12} \equiv m_1\vec{a}_{12}$. Automàticament es verifiquen, llavors, la segona i tercera lleis de Newton. Per tant, es focalitza la física del sistema en la interacció entre les dues partícules i les acceleracions corresponents. La magnitud força queda degradada a una simple definició, $F = ma$; així doncs, si les equacions del moviment d'una partícula es defineixen en funció d'aquesta força, no poden ser confirmades ni refutades per l'experiència. No obstant això, com puntualitzà A. Einstein en el seu curs de mecànica, esmentat abans, sí que ens podem veure obligats per l'experiència a abandonar-les, si la descripció dels fets, mitjançant aquest enfocament, requereix expressions molt complicades de la força així definida. En aquest cas, es rebutjarien les equacions del moviment per inadequades.

Però en el camp de la física aplicada i l'enginyeria mecànica, l'experiència ha ensenyat que és més pràctic i senzill emprar el punt de vista newtonià, ja que les forces, tot i la feblesa que indueixen des del punt de vista axiomàtic en l'edifici newtonià, físicament s'estima que representen millor les interaccions entre els cossos, en el món de la física clàssica aplicada, que no pas les acceleracions d'interacció alternatives. Aquest enfocament condueix a un difícil (si no artificial) estudi de l'estàtica, en el qual les acceleracions són nul·les. No obstant això, creiem pertinent reproduir l'opinió d'E. Schrödinger[14] sobre el concepte de força: «[...] encara que la perspectiva positivista contradiu la *intel·ligibilitat de la natura* no pressuposa la tornada al pensament màgic i supersticiós d'antany; ben al contrari, expulsa la noció de força de la física, la més perillosa relíquia de l'animisme en aquesta ciència.»

En la figura 7 es pot veure l'entramat de relacions que acabem d'analitzar. D'aquesta manera queda completada la figura 6.

Per finalitzar aquest subapartat, creiem oportú recordar l'opinió d'A. Einstein sobre Newton i el seu sistema teòric: «El mateix Newton era millor coneixedor de la feblesa intrínseca al seu edifici intel·lectual que les generacions que el seguiren. Aquest fet sempre ha despertat la meva admiració.» En l'apartat següent s'explicaran dos exemples per mostrar el punt de vista flexible que s'ha adoptat en el present article.

[14] En el llibre d'E. SCHRÖDINGER, *La naturaleza y los griegos*, Tusquets Editores, Metatemas, 48 (Barcelona, 1997).

Dos exemples d'aplicació de les lleis de Newton

Una característica que diferencia les mentalitats orientades cap a la física fonamental de les inclinades cap a món de la tecnologia rau en el tipus de qüestions i problemes que troben interessant plantejar-se.

Per exemple, en termes generals, a un futur enginyer li preocuparà conèixer i dominar les teories establertes per dissenyar i solucionar problemes pràctics amb els recursos tecnològics i econòmics de què pot disposar. En canvi, un futur físic potser gaudirà dissenyant experiments i plantejant-se qüestions que puguin posar a prova les teories acceptades i, inicialment, no el preocuparà gaire si és factible de portar a la pràctica experimental el que pensa. Està disposat, fins i tot, a acceptar com a natural que de vegades els experiments sols es puguin realitzar en el laboratori de la ment.

Probablement seria pertinent tenir en compte aquestes simples i òbvies observacions, quan s'estableixen els problemes i temes d'aplicació en les classes de batxillerat, on, però, és molt difícil assolir un equilibri, ja que hi participen alumnes, els interessos i formació dels quals omplen un ampli interval entre els dos estereotips esmentats.

Els dos exemples *a* i *b* que tot seguit s'expliquen, tenen per objectiu explicitar les dues tendències extremes considerades i, alhora, complementar el que s'ha exposat sobre els fonaments de la mecànica newtoniana.

a) Un límit de validesa de la teoria newtoniana. S'ha mostrat que les lleis de la mecànica són vàlides en tots els sistemes de referència inercials, la relació entre els quals la proporcionen les transformacions de Galileu. Això significa que es pot predir els resultats d'un experiment en qualsevol sistema de referència inercial, si es coneixen en un referencial, per exemple, en què s'ha efectuat l'experiment i les mesures corresponents. Per fixar les idees, considerem dos referencials inercials, segons s'esquematitza en la figura 4. L'aplicació directa de les transformacions de Galileu demostra immediatament que l'acceleració d'una partícula de massa m és la mateixa en ambdós referencials, és a dir, $\vec{a}' = \vec{a}$. Atès que la massa de la partícula és la mateixa en ambdós sistemes, és a dir, $m' = m$, se segueix que $m'\vec{a}' = m\vec{a}$. Per tant, d'acord amb la segona llei de Newton, s'ha de verificar que $\vec{F}' = \vec{F}$. Les acceleracions, masses i forces són magnituds que no canvien quan es mesuren en diferents referencials inercials, i per tant es diu que són magnituds invariants sota les transformacions de Galileu.

Després d'aquesta introducció, l'objectiu de la qual consisteix a demostrar que la força newtoniana és una magnitud vectorial invariant, considerem el senzill pro-

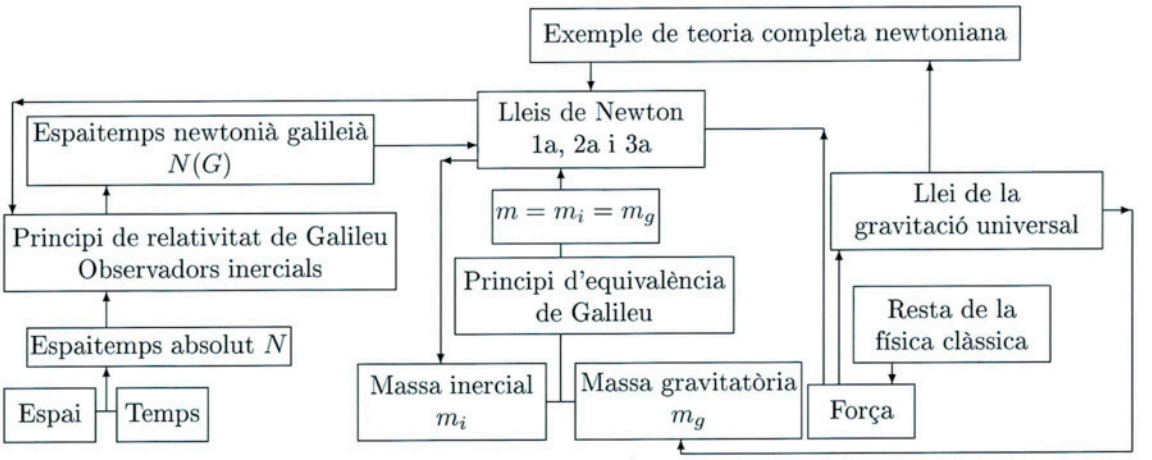

Figura 7: *Principals relacions estructurals entre els conceptes, les magnituds i les lleis del sistema físic newtonià*

blema següent. Siguin dues càrregues elèctriques q_1 i q_2, en repòs respecte del sistema de referència inercial Γ', que es mou amb velocitat $\vec{v}$ respecte del referencial inercial Γ, segons es mostra en la figura 8.

El problema consisteix a determinar la força sobre la càrrega q_2, segons la mesura cadascun dels observadors inercials. És a dir, $\vec{F}_{q_2}$ i $\vec{F}'_{q_2}$.

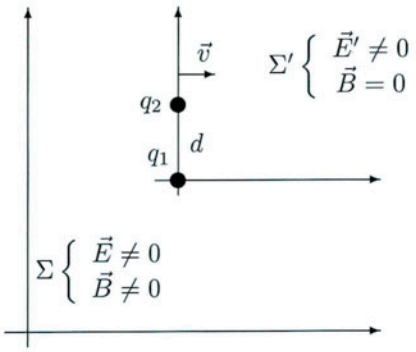

Figura 8: *Les càrregues elèctriques q_1 i q_2 estan en repòs respecte a Γ'*

Com s'acaba de demostrar, segons la mecànica newtoniana, haurien de ser les mateixes: $\vec{F}_{q_2} = \vec{F}'_{q_2}$. Però una ràpida anàlisi electromagnètica demostra que no ho són! En efecte, respecte a Γ', com que les dues càrregues estan en repòs, sols hi ha camp electrostàtic, per tant, la força que q_1 exerceix sobre q_2 ve donada per la llei de Coulomb:

$$\text{En } \Gamma' : \qquad \vec{F}'_{q_2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 d^2}.$$

En canvi, respecte a Γ, ambdues càrregues es desplacen amb velocitat $\vec{v}$ i, per tant, també generen camp magnètic. En particular, la càrrega q_1 crearà un camp magnètic, $\vec{B}_1$, que exercirà la força $q_2\vec{v} \times \vec{B}_1$ sobre la càrrega q_2. Com que la força coulombiana és invariant, ja que ho són les càrregues i la distància entre elles, obtenim en Γ:

$$F_{q_2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 d^2} + \text{força magnètica} = F'_{q_2} + F_{mag.} \neq F'_{q_2}. \tag{6}$$

L'equació (6) evidencia que les forces electromagnètiques no encaixen en el sistema teòric newtonià. Però com que els arguments anteriors són bastant conceptuals, s'imposa una predicció quantitativa a partir de l'equació (6), o d'una equivalent, per exemple, substituint la càrrega q_1 per una distribució lineal uniforme, en la qual el camp magnètic en Γ és el de Biot i Savart, camp inclòs en els programes de batxillerat.

En ambdós casos es dedueix fàcilment, que dins el marc newtonià, les forces electromagnètiques verifiquen:

$$\frac{F_{q_2}}{F'_{q_2}} = 1 - \frac{v^2}{c^2}. \tag{7}$$

Per tant, com s'ha anticipat en la discussió del límit de validesa del model d'espaitemps $N(G)$, la mecànica newtoniana dóna resultats equivocats, (no ratificats per l'experiència), si les velocitats són altes, és a dir, si no es poden negligir termes de l'ordre v^2/c^2. Per exemple, els acceleradors lineals de partícules tenen longituds de l'ordre de quilòmetres però, si es calculessin les dimensions emprant les equacions de la mecànica newtoniana, s'obtindrien tan sols longituds de l'ordre de centímetres per assolir els mateixos efectes. La teoria que substitueix la mecànica newtoniana en el domini de velocitats elevades és la relativitat especial.

b) Masses variables i la segona llei de Newton. Els exemples de cossos amb massa variable, per exemple un coet, un camió de reg, una cinta transportadora de material, etc., són casos pràctics que ajuden a avaluar d'una manera crítica l'aplicació directa de la segona llei de

Newton. En el present article s'ha preferit formular-la mitjançant la derivada temporal del moment lineal, en comptes de fer-ho per mitjà del producte de la massa per l'acceleració, que també és habitual, entre altres raons, perquè dóna rellevància a $\vec{p} = m\vec{v}$ i la magnitud $\vec{p}$ es trasllada, sense dificultat, als dominis relativistes i quàntics, on la teoria newtoniana deixa de ser aplicable.

Els exemples de massa variable mostren molt clarament, com explicava A. Sommerfeld als seus alumnes, molts dels quals van ser premis Nobel, el que s'ha d'entendre per la derivada del moment lineal dins el context de la segona llei.

Un error en què ensopeguen molts estudiants, quan un cos perd o guanya massa, rau en el fet que apliquen automàticament la segona llei, tal com operaria un ordinador, o sia, aplicant la regla de Leibnitz per derivar un producte:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}. \tag{8}$$

Però si s'analitza atentament aquesta equació, sota un punt de vista físic, immediatament s'evidencia que hi ha alguna cosa equivocada, perquè l'acceleració del cos, $d\vec{v}/dt$, segons (8) resulta independent de la velocitat amb què el cos perd o guanya massa. És a dir, no té en compte el típic i conegut efecte de «retrocés». Per tant, és lògic plantejar-se què s'ha d'entendre i com s'ha de calcular la derivada del moment lineal d'un cos de massa variable:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{p}(t+\Delta t) - \vec{p}(t)}{\Delta t} = \vec{F}. \tag{9}$$

Per fixar les idees considerem un coet en l'espai interestel·lar on $\vec{F} = \vec{0}$. Sigui $\vec{v}$ la velocitat del coet respecte a un referencial inercial i $\vec{v}_G$ la velocitat amb què són expulsats els gasos que són producte de la combustió. Els paràmetres bàsics de control, o sia, els que fixen els tripulants del coet, són la taxa de crema de combustible $\mu = -dm/dt$ i la velocitat d'ejecció dels gasos respecte al coet, és a dir, $\vec{v}_{Grel} = \vec{v}_G - \vec{v}$. Llavors el càlcul de (9) ha de tenir en compte que si bé en l'instant t el moment lineal del coet és:

$$\vec{p}(t) = m(t)\vec{v}(t).$$

En l'instant $t + \Delta t$ s'haurà de comptabilitzar el moment lineal que durant Δt correspon als gasos de combustió $\mu\Delta t\vec{v}_G$, ja que formen part del sistema total (cos) inicial. Per tant:

$$\vec{p}(t+\Delta t) = (m + \Delta m)(\vec{v} + \Delta\vec{v}) + \mu\Delta t\vec{v}_G.$$

Si es negligeix el producte d'infinitèsims $\Delta m \Delta v$ enfront d'infinitèsims de primer ordre, el que matemàticament equival a passar al límit

$$\vec{p}(t+dt) = \vec{p}(t) + \frac{d\vec{p}}{dt}dt,$$

s'obté, tenint en compte que $\mu = -dm/dt$:

$$\vec{p}(t+dt) = m\vec{v}(t) + md\vec{v} + \frac{dm}{dt}\vec{v}dt - \frac{dm}{dt}dt\vec{v}_G =$$
$$\vec{p}(t) + \left[m\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}(\vec{v} - \vec{v}_G\right] dt,$$

d'on resulta

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}(\vec{v} - \vec{v}_G) = \vec{F}.$$

Aquesta expressió proporciona dues visions equivalents per formular correctament l'equació general del moviment d'un cos de massa variable. La primera consisteix a expressar la velocitat d'expulsió dels gasos respecte al referencial inercial en què s'observa el coet:

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) - \frac{dm}{dt}\vec{v}_G = \vec{F}. \tag{10}$$

La segona consisteix a expressar la velocitat dels gasos respecte al coet $\vec{v}_{Grel} = \vec{v}_G - \vec{v}$ i interpretar directament el terme $\vec{R} \equiv \vec{v}_{Grel}\, dm/dt$ com la força de reacció deguda als gasos expulsats:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm}{dt}\vec{v}_{Grel}. \tag{11}$$

Les equacions equivalents (10) i (11) són vàlides d'una manera general és a dir, tant per a un cos que perd massa, $dm/dt < 0$, com per a un cos que en guanya $dm/dt > 0$. D'aquí que s'hagi incorporat la força externa $\vec{F}$ que se suposa aplicada al cos.

Un tecnòleg habituat a emprar la tècnica del «diagrama per a cos lliure» per resoldre problemes d'estàtica i dinàmica, probablement enfocaria el problema discutit d'una manera més senzilla, considerant el sistema complet cos + productes guanyats o perduts pel cos, ja que llavors el sistema total es redueix al cas de massa constant: $m(t) + m_G(t) =$ constant. Per tant el moment lineal total del sistema és

$$m(t)\vec{v}(t) + m_G(t)\vec{v}_G(t).$$

Si se suposa que $d\vec{v}_G/dt = 0$ i es té en compte que $dm/dt = -dm_G/dt$, una simple derivació del moment lineal total proporciona les equacions (10) o (11).

Les equacions (10) i (11) són adients per resoldre els dos casos extrems:

Si $\vec{v}_G = 0$, o sia, si els elements de massa guanyats o perduts pel cos tenen velocitat nul·la, llavors (10) es redueix a $\vec{F} = d(m\vec{v})/dt$. Això demostra que, sols en aquest cas, és vàlida l'equació (8). Alguns problemes que entren dins d'aquest tipus poden ser: l'estudi de la dinàmica d'una gota d'aigua que cau en un ambient quiet, saturat d'humitat; l'elevació d'una cadena, part de la qual resta en repòs al terra, etc.

Si $\vec{v}_{Grel} = \vec{0}$, l'equació (11) es redueix a $md\vec{v}/dt = \vec{F}$. Això és, la força de reacció és nul·la. Un problema d'aquest tipus és, per exemple, l'estudi de la dinàmica d'una corda, part de la qual penja de la vora d'una taula i cau lliscant.

Com és de sobres conegut, també és interessant l'anàlisi energètica d'aquests problemes.

Consideració final

L'objectiu que els autors s'han plantejat en redactar el present article consisteix a facilitar un material estructurat i suficientment rigorós, que pugui ser d'utilitat per al professorat de batxillerat i per al que imparteix un primer curs de física general a la universitat. També a l'alumnat, com a tema complementari a les explicacions del professor, li pot resultar de lectura profitosa. I si serveix per despertar en algun alumne la curiositat d'anar més enllà del que acostumen a explicar els llibres de text habituals, no sols en aquest tema, sinó també en molts d'altres, l'objectiu s'haurà complert totalment.

Opinem que les observacions, que sobre els fonaments de la mecànica newtoniana hem recollit dels professors Lapiedra i Agulló, són actualment encara més vigents. Per exemple, els alumnes de la modalitat de ciències de la naturalesa del batxillerat no tenen la física com a assignatura obligatòria; per tant, ens podem trobar alumnes a la llicenciatura de Física, que no l'han cursat al batxillerat! Aquest fet, afortunadament, no passa en la modalitat de tecnologia, en la qual la física i les matemàtiques són assignatures obligatòries. Aquesta dispersió en la formació fonamental de l'alumnat, agreujada per la disminució d'hores lectives, dificulta la tasca didàctica del professorat de ciències. Cada curs que passa, s'observa amb preocupació que cada cop és més difícil fer assimilables els conceptes fonamentals, ja que les capacitats de síntesi i abstracció de l'alumnat potser no s'han potenciat adequadament. En aquest sentit, els autors opinem que en alguns casos s'obtenen resultats oposats als previstos en les successives reformes educatives.

Referències

EINSTEIN, A. i INFELD, L., *Leopold Infeld. L'evolució de la Física*, Edicions 62 (Barcelona, 1984).

FEYMANN, R. P., LEIGHTON, R. B. SANDS, M., *The Feynman Lectures on Physics*, vol.1. Addison-Wesley (1963).

CATURLA, E. i VIDAL, F., *Física 2. Modalitat Ciències. Modalitat Tecnologia*, Castellnou Edicions (Barcelona, 1998).

VIDAL LLENAS, J. M., *Curso de física*, 7a ed. Grafesa, (Barcelona, 1972).

ROTHMAN, M. A., *Discovering the natural laws. The experimental basis of Physics*, Dover (Nova York, 1989).

JAMMER, M., *Concepts of force. A study in the foundation of dynamics*, Dover (1999).